

Systèmes de coordonnées

1) Coordonnées cartésiennes ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) :

Repère (O ; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) Base ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$)

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad } f} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{v}} = \left(\frac{\partial(v_z)}{\partial y} - \frac{\partial(v_y)}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial(v_x)}{\partial z} - \frac{\partial(v_z)}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial(v_y)}{\partial x} - \frac{\partial(v_x)}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \Delta v_x \vec{e}_x + \Delta v_y \vec{e}_y + \Delta v_z \vec{e}_z$$

$$(\vec{v} \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \left[\left(v_x \cdot \frac{\partial(v_x)}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial(v_x)}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial(v_x)}{\partial z} \right) ; \left(v_x \cdot \frac{\partial(v_y)}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial(v_y)}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial(v_y)}{\partial z} \right) ; \left(v_x \cdot \frac{\partial(v_z)}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial(v_z)}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial(v_z)}{\partial z} \right) \right]$$

2) Coordonnées cylindriques ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$) :

Repère (O ; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$) Base ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$)

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{grad } f} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(v_z)}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot } \vec{v}} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

$$\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \left[\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) ; \left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) ; \Delta v_z \right]$$

$$(\vec{v} \overrightarrow{grad})\vec{v} = \left[\left(v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) ; \left(v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) ; \left(v_r \cdot \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \cdot \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right]$$

$$x = \rho \cos \varphi ; \quad y = \rho \sin \varphi ; \quad \rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y$$

3) Coordonnées polaires ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) :

Repère (O ; $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$) Base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$)

Dans le cas ou $z = 0$ (ou plus particulièrement $z = \text{constante}$), on retrouve les coordonnées polaires (r, θ). OM = OH = $\rho = r$. On appelle plan polaire le plan (xoy).

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

$$x = r \cos \theta ; \quad y = r \sin \theta ; \quad r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

4) Coordonnées sphériques ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$) :

Repère (O ; $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$) Base ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$)

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta v_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \text{ ou bien } \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot f) + \dots$$

$$\vec{\Delta} \vec{v} = \left(\Delta v_r - \frac{2}{r^2} \left(v_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta \sin \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right) ; \left(\Delta v_\theta - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right) ;$$

$$\left(\Delta v_\varphi - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{2 \sin \theta} \right) \right)$$

$$(\vec{v} \text{ grad})\vec{v} = \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{r} \right); \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi \cotan \theta}{r} \right); \left(v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} - \frac{v_\theta v_\varphi \cotan \theta}{r} \right)$$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi ; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi ; \quad z = r \cos \theta$$

$$\vec{e}_x = \vec{e}_r \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \theta$$

$$\vec{e}_y = \vec{e}_r \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \theta$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta$$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_x \cos \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \cos \theta \sin \varphi - \vec{e}_z \sin \theta$$

$$\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta ; \quad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \cos \theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial r} = 0 ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 ; \quad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} =$$

5) Coordonnées intrinsèques :

La position d'un point mobile M peut être déterminée par son abscisse curviligne S(t). En effet à un point d'une trajectoire (C) il est possible d'associer un trièdre trirectangle d'origine M dont les axes sont définis par trois vecteurs unitaires ($\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$, $\vec{e}_b$) tels que :

- $\vec{e}_t$ est le vecteur unitaire de la tangente au point M à (C), orienté positivement dans le sens du mouvement.
- $\vec{e}_n$ est le vecteur unitaire de la normale (normale principale) à la tangente en M à (C) orienté positivement vers la concavité de la trajectoire au point M.
- $\vec{e}_b$ est tels que : $\vec{e}_b = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n$

Le repère local (M ; $\vec{e}_t$, $\vec{e}_n$, $\vec{e}_b$) est appelé repère intrinsèque ou trièdre de Serret-Frenet. Si M_0 est une origine sur (C), l'abscisse curviligne est $S(t) = \widehat{M_0 M}$.

Le plan formé par $\vec{e}_t$ et $\vec{e}_n$ est appelé << plan osculateur >>.

Dans ce plan, le cercle qui épouse le plus près de la courbure de la trajectoire au voisinage de M est appelé cercle osculateur.

Son centre C et son rayon $\rho = \widehat{MC}$ sont respectivement appelés centre de courbure et rayon de courbure de la trajectoire au point M.

Si M' est un point voisin de M sur la trajectoire, alors $\widehat{MM'} = ds = \rho d\varphi$.

Dans ce cas lorsque $M' \rightarrow M$ alors $\widehat{MM'} \rightarrow \overrightarrow{M'M}$ qui tend vers la tangente en M à (C) d'où la figure ci-dessous :

